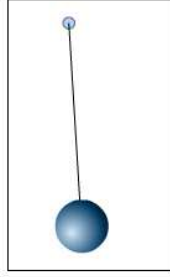


# المجموعة الميكانيكية المتذبذبة Système mécanique oscillant

## I - تقديم مجموعات ميكانيكية متذبذبة



النواس الوزن



النواس البسيط



نواس اللي



النواس المرن

### 1 - تعريف بالمجموعة الميكانيكية المتذبذبة

المجموعة الميكانيكية هي مجموعة تنجز حركة دورية حول موضع توازنها المستقر .  
تذكير بتعريف الحركة الدورية : هي حركة تتكرر مماثلة لنفسها خلال مدد زمنية متساوية .

#### أ - النواس الوزن

النواس الوزن هو كل مجموعة غير قابلة للتشويه بإمكانها إنجاز حركة تذبذبية حول محور ثابت تحت تأثير وزنها .

مثال : رقاص ساعة جدارية :

عند حركة الرقاص ، يخضع إلى القوى التالية :  $\vec{P}$  وزن الرقاص .  $\vec{R}$  تأثير المحور ( $\Delta$ ) محور الدوران .  
القوى التي لها مفعول على حركة الرقاص هي وزنه فقط ، بينما  $\vec{R}$  ليس لها أي مفعول على حركة الرقاص .

#### ب - النواس البسيط

النواس البسيط هو كل نقطة مادية تتأرجح على مسافة ثابتة من محور أفقي ثابت .  
عمليا للحصول على نواس بسيط نعلق جسم صغير كثافته جد عالية بطرف خيط كتلته مهملة وغير قابل الامتداد ونشد الطرف الآخر بحامل ثابت .

عند حركة النواس البسيط فهو يخضع للقوى التالية :  $\vec{P}$  وزن الجسم و  $\vec{F}$  تأثير الخيط على الجسم .  
القوة الوحيدة التي لها مفعول على حركة النواس البسيط هي وزنه فقط ، بينما  $\vec{F}$  خط تأثيرها يتقاطع مع محور الدوران وبالتالي ليس لها مفعول على حركته .

ملحوظة : أبعاد الجسم جد صغيرة أما طول الخيط ( $r \ll \ell$ ) يمكن اعتبار في هذه الحالة أن الجسم نقطيا والنواس البسيط متذبذبا ميكانيكيا مثاليا وحالة خاصة للنواس الوزن .

#### ج - نواس اللي

نواس اللي جهاز يتكون من سلك فلزي ثبت أحد طرفيه إلى حامل ، ومن قضيب متجانس معلق من مركز قصوره بالطرف الثاني للسلك .

عند إدارة القضيب أفقيا بزاوية  $\theta$  حول المحور ( $\Delta$ ) المجسم بالسلك ، فإن السلك يلتوي ، فيسعى للعودة إلى حالته البدئية ، بحيث يطبق على القضيب تأثيرا تنتج عنه مزدوجة تسمى بمزدوجة اللي وهي مزدوجة ارتداد Couple de rappel تقاوم التواء السلك وبالتالي تحدث حركة تذبذبية للقضيب حول موضع توازنه المستقر .

#### د - النواس المرن

يتكون النواس المرن من جسم صلب معلق بطرف نابض ذي لفات غير متصلة وكتلة مهملة . الطرف الثاني للنابض مثبت بحامل ثابت .

عند تشويه النابض وتحريره نلاحظ أن ينجز حركة تذبذبية حول موضع توازنه المستقر ، تعزى هذه الحركة إلى القوة المطبقة من طرف النابض على الجسم والتي تتعلق بحالة النابض إذا كان مطالا أو مكبوسا أو مضغوطا إذ تقاوم هذه القوة تشويه النابض ، لذلك تسمى بقوة الارتداد .

## 2 - الحركة التذبذبية ومميزاتها .

### 2 - 1 تعريف

الحركة التذبذبية هي حركة ذهاب وإياب حول موضع معين ، وهي حركة تميز المتذبذبات الميكانيكية . هناك ثلاثة أنواع للحركة التذبذبية :

– الحركة التذبذبية الحرة : هي التي ينجزها متذبذب ميكانيكي دون اكتساب طاقة ما من المحيط الخارجي بعد إحداث حركته .

– الحركة التذبذبية المصانة : هي التي ينجزها المتذبذب وذلك بتعويض الطاقة المفقودة خلال التذبذبات بواسطة جهاز خارجي . مثال الساعة الحائطية .

الحركة التذبذبية القسرية : عندما تفرض مجموعة ميكانيكية تسمى بالمثير تردد لذبذبات على المجموعة المتذبذبة والتي تسمى بالرنان .

### 2 - 2 مميزات الحركة التذبذبية

#### أ - موضع التوازن المستقر

كل متذبذب ميكانيكي حر لا يمكنه أن ينجز حركته التذبذبية إلا حول موضع توازنه المستقر .

#### ب - وسع الحركة

وسع الحركة لمتذبذب ميكانيكي حر وغير مخمد هو القيمة القصوى الموجبة التي يأخذها المقدار الذي يعبر عن مدى ابتعاد أو انحراف المتذبذب عن موضع توازنه المستقر .

بالنسبة للنواس الوزن والنواس البسيط ونواس اللي نستعمل الأفصول الزاوي  $\theta$  .

بالنسبة للنواس المرن ، نستعمل الأفصول المنحني ( حركة إزاحة مستقيمة )

مثال :

#### • النواس الوزن

عند إزاحة النواس الوزن عن موضع توازنه المستقر ، ثم نحرره ،

ينجز ذبذبات حرة في المستوى الرأسي الذي يحتوي على

الموضع البدئي وعلى موضع التوازن المستقر لمركز قصوره  $G$  .

الأفصول الزاوي لنواس وازن ( أو بسيط ) هو الزاوية الموجهة  $\theta(t)$

بحيث :

$$\theta(t) = (\overrightarrow{OG_{(eq)}}, \overrightarrow{OG_{(t)}})$$

و  $G_{(t)}$  هو موضع  $G$  عند اللحظة  $t$  .

أثناء الحركة يأخذ الأفصول الزاوي  $\theta$  قيما موجبة وقيما سالبة .

ويإهمال الخمود بالنسبة للذبذبات الأولى ، يتغير  $\theta$  بين قيمة

قصوى  $\theta_m$  وقيمة دنيا  $(-\theta)$  وتسمى القيمة المطلقة لهاتين

القيمتين وسع الحركة للنواس الوزن الحر وغير المخمد .

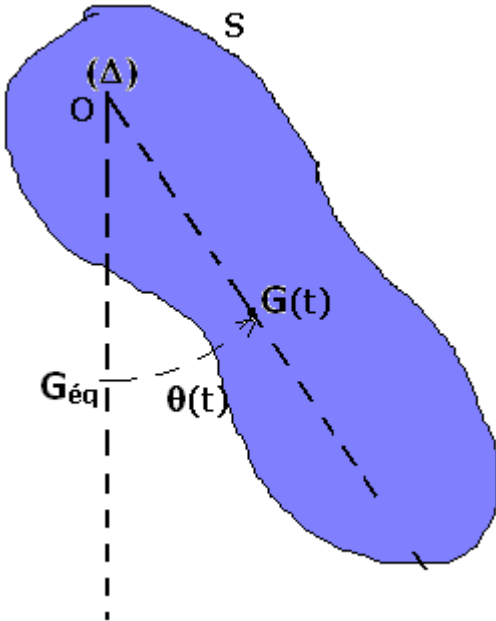
#### • النواس المرن

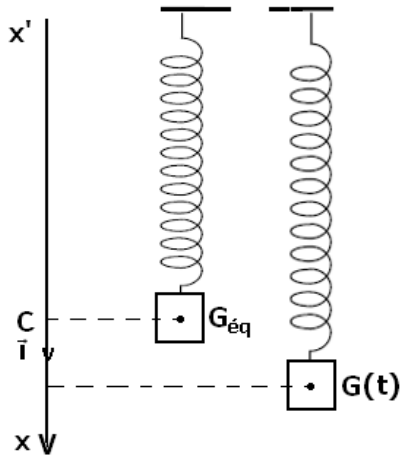
عند إزاحة الجسم عن موضع توازنه المستقر وفق اتجاه محور النابض وتحريره ، فإنه ينجز حركة تذبذبية

حرة حول هذا الموضع . نعلم مواضع مركز قصور النواس المرن في المعلم  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  متعامد

وممنظم محوره  $(O, \vec{i})$  رأسي وموجه نحو الأسفل بالأفصول  $x(t)$  بحيث أن  $\overrightarrow{G_{eq}} = x(t) \vec{i}$

$G_{eq}$  موضع  $G$  عند التوازن المستقر .





أثناء الحركة الحرة وغير المخمدة للنواس ، تأخذ  $x$  قيما موجبة أكبرها  $x_m$  وقيما سالبة أصغرها  $-x_m$  ، نسمي  $x_m$  وسع الحركة للنواس المرن .

### ج - الدور الخاص

الدور الخاص  $T_0$  لمتذبذب ميكانيكي حر وغير مخمد هو المدة الزمنية الفاصلة بين مرورين متتاليين للمتذبذب من موضع توازنه المستقر في نفس المنحنى ، وحدته في النظام العالي للوحدات هي الثانية (s)

## 2 - 3 خمود الذبذبات الميكانيكية

### أ - ظاهرة الخمود

تجربة :

عند إزاحة متذبذب ميكانيكي ( مثلا نواس وازن) عن موضع توازنه المستقر وتحريره ، فإنه ينجز ذبذبات حرة يتناقص وسعها تدريجيا مع الزمن ، إلى أن يتوقف عند موضع توازنه المستقر ، تسمى هذه الظاهرة ظاهرة الخمود الميكانيكي .

تعزى هذه الظاهرة إلى الاحتكاكات والتي يمكن تصنيفه إلى نوعين :

- احتكاكات صلبة والتي ينتج عنها خمود صلب للذبذبات .

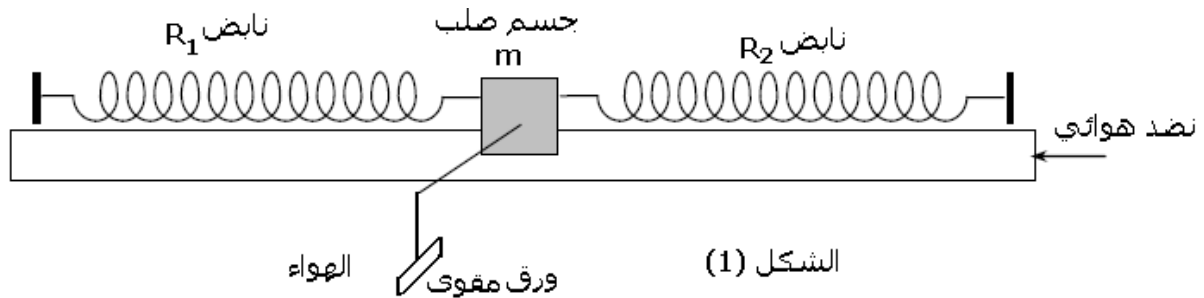
- احتكاكات مائعة والتي ينتج عنها خمود مائع للذبذبات .

ب - أنظمة خمود الذبذبات الميكانيكية .

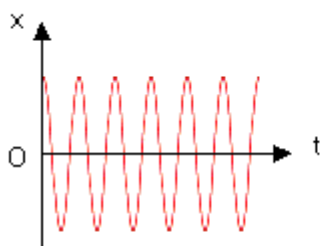
الخمود بالاحتكاكات المائعة :

دراسة تجريبية :

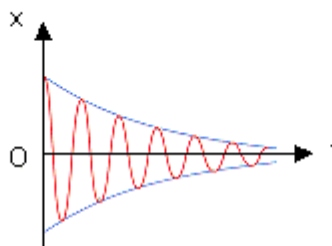
ننجز التركيب التجريبي المبين في الشكل (1) حيث الخيال في حالة توازن فوق نضد هوائي أفقي ، بحيث يكون النابضان مطاليين .



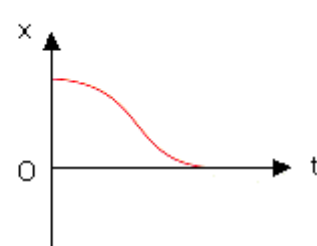
نشغل المعصفة ونزيح الخيال عن موضع توازنه ، ثم نحرره بدون سرعة بدئية . فنحصل على الشكل (2) نثبت على الخيال قطعة من الورق المقوى ونعيد نفس التجربة فنحصل على المنحنى الشكل (3) .



احتكاكات منعدمة  
الشكل (2)



احتكاكات ضعيفة  
الشكل (3)



احتكاكات مهمة  
الشكل (4)

1 - ما طبيعة ذبذبات الخيال عند تشغيل المعصفة مع إهمال الاحتكاكات .

- 2 - حدد صنف الخمود ونظام اشتغال المتذبذب في كل حالة .  
3 - اقترح طريقة عملية لإبراز النظام اللادوري تجريبيا ، واعط شكل مخطط المسافات الوافق .

### خلاصة :

- حالة الخمود الضعيف : النظام شبه الدوري .  
في هذه الحالة ينجز المتذبذب الميكانيكي ذبذبات يتناقص وسعها تدريجيا إلى أن يستقر المتذبذب عند موضع توازنه المستقر .  
كما أنه في هذه الحالة أن حركة المتذبذب ليست دورية نقول إنها شبه دورية ودورها  $T$  يقارب الدور الخاص  $T_0$  للمتذبذب . عموما  $(T_0 < T)$  . نسمي  $T$  شبه الدور .  
شبه الدور بالنسبة لمتذبذب ميكانيكي خموده ضعيف هو المدة الزمنية هو المدة الزمنية  $T$  التي تفصل مرورين متتاليين للمتذبذب من موضع توازنه المستقر في نفس المنحى .  
ملحوظة : كلما كان خمود المتذبذب ضعيفا ، كلما تناهى شبه الدور  $T$  نحو الدور الخاص  $T_0$  .  
كلما صار الخمود مهما ، كلما تناقص وسع الحركة بشدة إلى أن ينعدم خلال فترة زمنية وجيزة .

### ب - حالة الخمود الحاد : النظام اللادوري .

في هذه الحالة تكون حركة المتذبذب غير دورية ، نقول أنها لا دورية ، وحسب أهمية الخمود ، نحصل على الحالات التالية :  
- النظام تحت الحرج : ينجز المتذبذب ذبذبة واحدة قبل أن يتوقف .  
- النظام الحرج : حيث يعود المتذبذب إلى موضع توازنه المستقر دون أن يتذبذب .  
- النظام فوق الحرج : حيث يستغرق المتذبذب وقتا طويلا لكي يرجع إلى موضع توازنه المستقر دون أن يتذبذب .

ملحوظة : لصيانة حركة تذبذبية نوظف بعض الأجهزة الميكانيكية تكمن وظيفتها في تعويض الطاقة المبددة في كل دور . مثال : صيانة ذبذبات شفرة هزاز بواسطة كهرمغناطيس .

### ج - الخمود بالاحتكاكات الصلبة

مثال النواس الوازن

تكون الاحتكاكات على مستوى محور الدوران " الصلبة " تكون في هذه الحالة ذبذبات النواس شبه دورية ويتناقص وسعها بكيفية خطية . ويساوي شبه الدور للذبذبات الدور الخاص للمتذبذب إذا كان حرا وغير مخمد .

### II - دراسة ذبذبات المجموعة { جسم صلب -

نابض }

#### 1 - قوة الارتداد التي يطبقها نابض .

الدراسة التجريبية :

نعلق بالحامل نابضا ذا صلابة  $k$  ، طوله الأصلي  $l_0$

نعلق بالطرف  $A$  لنابض كتلة معلمة  $m$  ، فيطال النابض حيث يصبح طوله  $l$  بحيث ينتقل طرفه الحر بالمسافة  $A_0 A_{eq}$

1 - ذكر بالطريقة العملية لتعيين صلابة النابض .

2 - أعط بدلالة  $l, l_0, k$  ، تعبير شدة القوة المطبقة من طرف النابض على الكتلة المعلمة ، واستنتج

تعبير  $\vec{F}$  بدلالة  $k$  والمتجهة  $\overline{A_0 A_{eq}}$  .

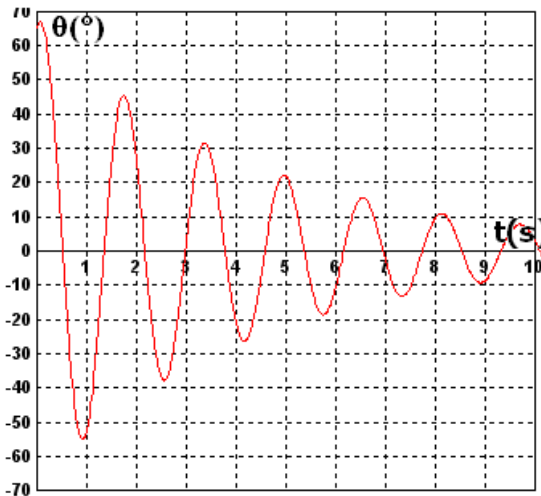
نعتبر نواسا مرنا في وضع أفقي ، عندما يكون النابض حرا تحتل نقطة تماسه مع الجسم الموضع  $A_0$  ،

تكون في هذه الحالة  $A_0$  و  $A_{eq}$  متطابقتين .

عندما يكون النابض مطالا ( مضغوطة ) تحتل هذه النقطة الموضع  $A$  .

#### 1 - 1 القوى المطبقة على الجسم

$\vec{P}$  وزن الجسم و  $\vec{R}$  تأثير السطح على الجسم ( غياب الاحتكاك ) ،  $\vec{F}$  القوة المطبقة من طرف النابض على الجسم وهي قوة ارتداد تسعى إلى إرجاع الجسم إلى موضعه البدئي .



## 1\_2 مميزات قوة الارتداد

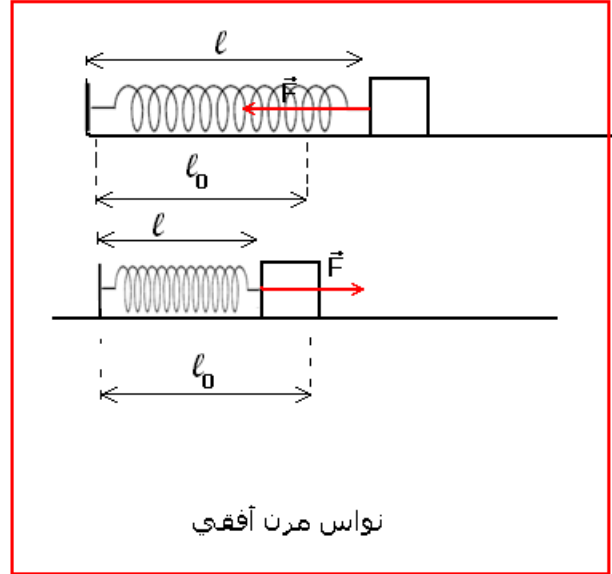
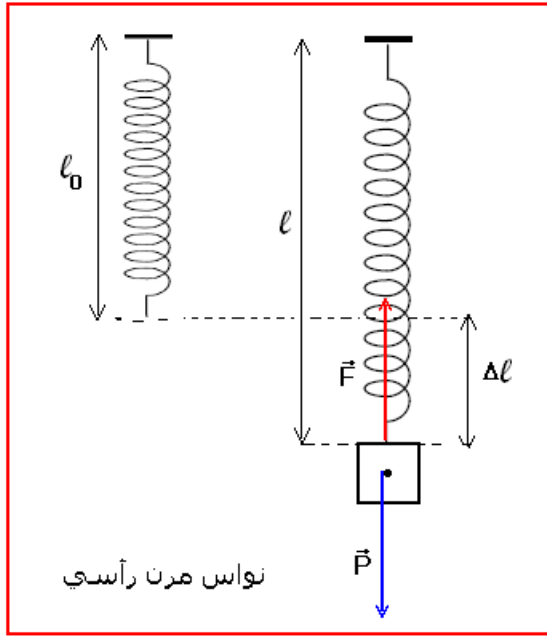
نقطة التأثير : نقطة التماس الجسم والناض .

خط التأثير : محور الناض

المنحى : موجه نحو داخل الناض في حالة الناض مطالا ، أو خارجه في حالة الناض مكبوس أو مضغوط .

الشدة :  $F = k\Delta l = k(\ell - \ell_0)$  حيث  $k$  صلابة الناض و  $\Delta l$  إطالته بالمتر و  $\ell_0$  طوله البدئي ،  $\ell$  طوله النهائي .

يمكن أن نقرن بإطالة الناض  $\Delta l$  المتجهة  $\overrightarrow{A_0A}$  وهي متجهة انتقال النقطة A بحيث أن  $\vec{F} = -k\overrightarrow{A_0A}$  .



## 2\_ المعادلة التفاضلية

نعتبر نواصا أفقيا بحيث ينجز الجسم الصلب (S) ذبذبات حرة وغير مخمدة .

نعلم G مركز قصور الجسم الصلب بالأفصول x في معلم  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  متعامد وممنظم محوره

$(O, \vec{i})$  أفقي يطابق أصله  $G_0$  موضع G عند التوازن :  $\overrightarrow{OG} = x\vec{i}$  .

المعلم  $\mathcal{R}$  مرتبط بمراجع أرضي باعتباره

غاليليا حيث نطبق القانون الثاني لنيوتن

على الجسم (S) أثناء حركته .

المجموعة المدروسة : الجسم (S) ذو

كتلة m .

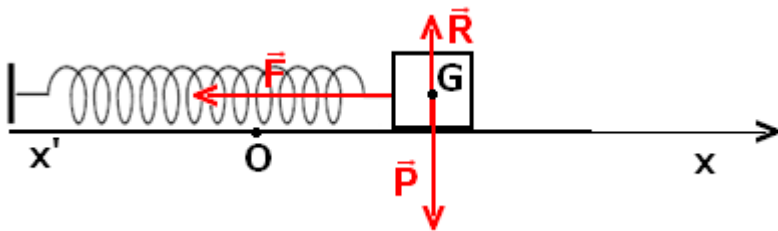
القوى المطبقة على الجسم :  $\vec{P}$  وزنه و

$\vec{R}$  تأثير المستوى الأفقي على الجسم و  $\vec{F}$  قوة الارتداد التي يطبقها الناض على الجسم بحيث أن

$$\vec{F} = -k\overrightarrow{A_0A} \quad \overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{G_0G}$$

ومنه فإن  $\vec{F} = -kx\vec{i}$

حسب القانون الثاني لنيوتن :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$



لدينا  $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$  لغياب الحركة على المحور  $(O, \vec{j})$  وبالتالي  $\vec{F} = m\vec{a}$   
 الإسقاط على  $(O, \vec{i})$  :  $F = -kx\vec{i}$  بحيث أن  $x$  موضع G عند اللحظة  $t$  أي أن  $-kx\vec{i} = \ddot{x}\vec{i}$ .

نستنتج المعادلة التفاضلية من العلاقة السابقة :  $kx + m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

العلاقة :  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$  تمثل المعادلة التفاضلية للنواس المرن .

ملحوظة : نفس المعادلة يمكن التوصل إليها بالنسبة للنواس المرن الرأسي . أنظر التمرين التطبيقي 1  
**3 - حل المعادلة التفاضلية :**

لدينا معادلة تفاضلية خطية حلها بصفة عامة هو على الشكل التالي :  $x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$  حيث :

$\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$  : طور التذبذبات عند اللحظة  $t$  وحدته rad .

$\varphi$  طور التذبذبات عند اللحظة  $t=0$  نعبر عنه ب rad .

$x_m$  وسع الحركة بالمتر (m)

$T_0$  الدور الخاص للتذبذبات ب s

طبيعة حركة مركز القصور G للجسم مستقيمة جيبية دالتها الزمنية هي :  $x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

- تحدد قيمتي  $x_m$  و  $\varphi$  انطلاقا من الشروط البدئية .

- لدينا :  $-1 \leq \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \leq +1 \Rightarrow -x_m \leq x(t) \leq +x_m$

#### 4 - تعبير الدور الخاص

يحدد تعبير الدور الخاص انطلاقا من المعادلة التفاضلية بحيث نبحث عن الشرط الذي ينبغي توفره لكي

تكون الدالة  $x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$  حلا للمعادلة التفاضلية السابقة :

لدينا  $\dot{x}(t) = -\frac{2\pi}{T_0}x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$  و كذلك  $\ddot{x}(t) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

في المعادلة التفاضلية :

$$-\frac{4\pi^2}{T_0^2}x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + \frac{k}{m}x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = 0$$

$$x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \left(\frac{k}{m} - \frac{4\pi^2}{T_0^2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{k}{m} - \frac{4\pi^2}{T_0^2}\right) = 0 \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

بحيث أن  $T_0$  الدور الخاص للنواس المرن

$m$  كتلة الجسم (S) ب kg و  $k$  صلابة النابض ب (N/m)

نعبر كذلك عن التردد الخاص للتذبذبات بالعلاقة التالية :  $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

وحدة التردد في النظام العالمي للوحدات هي الهرتز . (Hz)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{دراسة تجريبية : التحقق من العلاقة}$$

نعلق كتلة معلمة بنابض ، ونعلم موضع النقطة A عند التوازن  $A_{eq}$  .  
نزيح الكتلة المعلمة رأسيا نحو الأسفل بالوسع  $x_m$  ونحررها بدون سرعة بدئية . بواسطة ميثت يدوي نقيس مدة 10 ذبذبات .  
نعيد التجربة 3 مرات بحيث في كل مرة قيمة  $x_m$  .

- نعيد التجربة 3 مرات مع تغيير الكتلة في كل مرة مع الاحتفاظ بنفس النابض .  
نعيد التجربة 3 مرات مع تغيير النابض في كل مرة واستعمال نفس الكتلة المعلمة .  
1 - لماذا لا نقيس مباشرة ذبذبة واحدة ؟ هل يتعلق الدور الخاص بوسع الحركة ؟  
2 - ما تأثير كل من كتلة الجسم المعلق و صلابة النابض على الدور الخاص ؟  
3 - هل هذه النتيجة تتوافق مع العلاقة التي تم التوصل إليها في الدراسة النظرية ؟

### III - دراسة ذبذبات نواس اللي

#### 1 - مزدوجة الارتداد المطبقة من طرف سلك اللي .

عند تطبيق مزدوجة قوتين على قضيب معلق بسلك ، فإن هذا الأخير يلتوي . وعند حذف المزدوجتين ، يعود السلك إلى موضع توازنه بفعل قوة الارتداد التي تطبقها مولدات السلك على القضيب وموجوع هذه القوى يكون مزدوجة تسمى بمزدوجة اللي ونرمز لها ب  $M_C$  .

عزم هذه المزدوجة مستقل عن المحور ونعبر عنه بالعلاقة التالية :  $M_C = -C.\theta$

بحيث أن  $C$  ثابتة لي السلك وحدتها هي  $N.m.rad^{-1}$  و  $\theta$  زاوية اللي ب  $rad$  تتعلق ثابتة اللي بطول السلك وبمقطعه وبنوعيته .

#### 2 - المعادلة التفاضلية لحركة الجسم الصلب وحلها .

نعتبر نواس اللي في توازنه المستقر . ندير القضيب عن موضع توازنه بالزاوية  $\theta_m$  ، ونحرره بدون سرعة بدئية ، فينجز القضيب حركة تذبذبية حرة حول موضع توازنه المستقر .

نعتبر الاحتكاكات مهملة .  $J_\Delta$  عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور ( $\Delta$ ) المجسد بالسلك . و  $C$  ثابتة اللي للسلك.

ندرس حركة القضيب في مرجع مرتبط بالأرض والذي نعتبره مرجعا غاليليا ، ونعلم موضع القضيب بأفصوله الزاوي  $\theta$  والذي نقيسه بالنسبة لاتجاه مرجعي وهو اتجاه القضيب عند التوازن .  
جرد القوى المطبقة على القضيب :  $\vec{P}$  وزن القضيب ،  $\vec{R}$  تأثير السلك على القضيب ، ومزدوجة اللي وعزمها هو  $M_C = -C.\theta$  .

تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على القضيب :

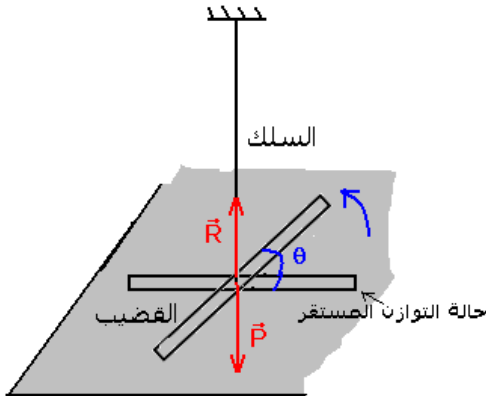
$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_C = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

بما أن خط تأثير القوتين  $\vec{P}$  و  $\vec{R}$  متطابقان لمحور الدوران فمفعولهما علة دوران القضيب منعدم أي أن عزمهما منعدم .

$$M_C = J_\Delta.\ddot{\theta} \Rightarrow -C\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية لحركة القضيب هي :  $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$

حل المعادلة التفاضلية :



المعادلة التفاضلية شبيهة من ناحية الشكل بالمعادلة التفاضلية التي تم التوصل إليها بالنسبة للنواس

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) : \text{ الشكل التالي على الشكل التالي :}$$

$\theta_m$  و  $\varphi$  تتعلقان بالشروط البدئية للحركة .

### 3 - الدور الخاص :

بتعويض حل المحصل عليه في المعادلة التفاضلية نحصل على الدور الخاص للنواس اللي الحر وهو على الشكل التالي :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} \text{ حيث } J_\Delta \text{ عزم قصور القضيب ( الجسم الصلب ) بالنسبة للمحور } (\Delta) \text{ نعبّر عنه } kg.m^2 \text{ و}$$

$C$  ثابتة اللي للسلك نعبّر عنها  $N.m.rad^{-1}$  .

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}} : \text{ التردد الخاص لنواس اللي هو :}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} \text{ دراسة تجريبية : التحقق التجريبي من العلاقة}$$

### الجهاز التجريبي

ننجز التركيب التجريبي الممثل في الشكل جانبه والمتكون من سلكين ثلثة ليهما على التوالي  $C_1$  و  $C_2$  بحيث أن ثابتة اللي المكافئة للسلكين هي

$$C = C_1 + C_2$$

ونعلم أن ثابتة اللي تتعلق بطول السلك  $l$  وهي تتناسب عكسيا مع الطول  $l$  قضيب معدني متجانس يحمل في طرفيه سحمتين كتلة كل واحدة منهما هي

$$m \text{ عزم قصوره هو } J'_\Delta = J_\Delta + 2md^2 \text{ حيث } J_\Delta \text{ عزم قصور القضيب}$$

نزح القضيب عن موضع توازنه بالزاوية  $\theta_m$  ونطلقه بدون سرعة بدئية .

نلاحظ : ينجز القضيب حركة تذبذبية دورانية حول موضع توازنه في المستوى

المتعامد مع القضيب

### 1 - تأثير عزم قصور القضيب

تجربة : نأخذ سلك ثابتة ليه  $C$  ونغير عزم قصوره  $J'_\Delta$

$$J'_\Delta = J_\Delta + 2md^2$$

$J_\Delta$  عزم قصور القضيب .  $m$  كتلة السحمة أو الجسم المثبت على القضيب

$d$  المسافة بين المحور  $(\Delta)$  والسحمة .

نغير المسافة  $d$  ونقيس الدور الخاص  $T_0$  بواسطة خلية كهر ضوئية

مرتبطة بميقات إلكتروني .

نقارن قيم  $T_0$  و  $J'_\Delta$  ماذا نلاحظ ؟

كلما ازدادت  $d$  ازدادت كذلك  $T_0$  أي كلما ازدادت  $J'_\Delta$  ازدادت  $T_0$

استنتاج :  $T_0$  و  $J'_\Delta$  يتناسبان أطرادا .

$$T_0 = k\sqrt{J'_\Delta}$$

### 2 - تأثير ثابتة اللي للسلك .

نثبت عزم قصور القضيب  $J'_\Delta$  ونغير السلك - طوله أو طبيعته -

نقارن قيم  $T_0$  و  $C$  ماذا نلاحظ ؟

نلاحظ : أنه كلما ازدادت ثابتة اللي للسلك يتناقص الدور الخاص  $T_0$

أي أن  $T_0$  و  $C$  يتناسبان عكسيا والدراسة الكمية تبين أن :  $T_0 = \frac{k'}{\sqrt{C}}$

3 - هل هذه النتيجة تتوافق مع العلاقة التي تم التوصل إليها في الدراسة النظرية ؟

#### IV - دراسة ذبذبات النواس الوازن .

##### 1 - المعادلة التفاضلية لحركة النواس الوازن وحلها .

المجموعة المدروسة : الجسم  $(S)$  كتلته  $m$  وعزم قصوره

بالنسبة لمحور الدوران  $(\Delta)$  الأفقي  $J_\Delta$  .

المعلم : مرتبط بالأرض، المرجع الأرضي ونعتبره غاليليا .

في كل لحظة معلم موضع النواس  $G$  بالأفصول الزاوي  $\theta(t)$

جرد القوى المطبقة على المجموعة :

- وزنها  $\vec{P}$

- تأثير المحور  $(\Delta)$  على المجموعة  $\vec{R}$  .

نطبق العلاقة الأساسية للتحريرك على المجموعة في حالة الدوران

$$\text{حول المحور } (\Delta) : \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

بما أن خط تأثير القوة  $\vec{R}$  يتقاطع مع محور الدوران  $(\Delta)$  فإن عزمها

$$\text{منعدم بالنسبة لهذا المحور} : \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$$

$$\text{وبالتالي} : \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$$\text{لدينا} : \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgd \sin \theta \quad \text{أي أن (1)} \quad -mgd \sin \theta = J_\Delta \cdot \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta} \sin \theta = 0$$

العلاقة التي تم التوصل إليها هي المعادلة التفاضلية لحركة النواس الوازن وهي غير خطية وبالتالي فحلها ليس جيبيا .

##### حالة الذبذبات ذات وسع صغير .

تعتبر الذبذبات ذات وسع صغير إذا كانت  $\theta \leq 15^\circ$  يعني أن  $\theta \leq 0,26 \text{ rad}$  في هذه الحالة تكون

$$\sin \theta \approx \theta \quad \text{وتصبح المعادلة التفاضلية (2)} \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta} \theta = 0$$

قياسا مع ما سبق نقبل أن حل هذه المعادلة التفاضلية هو على الشكل التالي :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

##### 2 - الدور الخاص لنواس وازن ينجز ذبذبات حرة وغير مخمدة وذات وسع صغير .

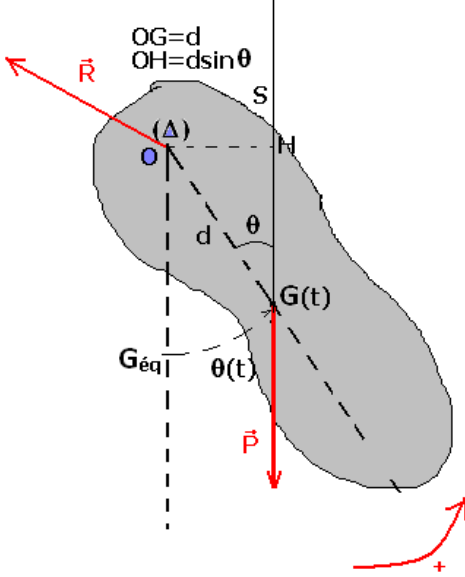
الدور الخاص لنواس وازن ينجز ذبذبات حرة وغير مخمدة وذات وسع صغير:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}}$$

$J_\Delta$  عزم قصور الجسم بالنسبة للمحور  $(\Delta)$  نعبر عنه ب  $(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$

$d$  المسافة الفاصلة بين المحور  $(\Delta)$  ومركز قصور المجموعة المتذبذبة . ب  $(\text{m})$

$m$  كتلة المجموعة ونعبر عنها ب  $(\text{kg})$



$g$  شدة الثقالة ( $m/s^2$ ) .

تعبير التردد الخاص  $f_0$  لنواس وازن ينجز ذبذبات حرة غير مخمدة وذات وسع صغير :  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgd}{J_\Delta}}$

### 3 - النواس البسيط

النواس البسيط هو نموذج مثالي للمتذبذب ميكانيكي . وهو حالة خاصة للنواس الوازن حيث :  
 $d = \ell$  و  $J_\Delta = m\ell^2$  . في هذه الحالة تكون المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

وتقبل هذه المعادلة كحلا لها :  $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$  وتمثل المعادلة الزمنية

لحركة النواس البسيط .

تعبير الدور الخاص للنواس البسيط :  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$  حيث  $\ell$  طول النواس البسيط ب

( $m$ ) و  $g$  شدة مجال الثقالة ( $m/s^2$ ) .

طول النواس البسيط المتوافق مع النواس البسيط :

نقول أن النواس البسيط متوافق مع النواس الوازن إذا كان لهما نفس الدور أي أن دور النواس البسيط = دور النواس الوازن .

$$2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}} \Rightarrow \ell = \frac{J_\Delta}{md}$$

## V - ظاهرة الرنين الميكانيكي

### 1 - الذبذبات القسرية

في الواقع تؤثر الاحتكاكات على حركة المتذبذبات الميكانيكية والتي تؤدي إلى خمود حركتها مع الزمن في حالة ما لم يتم تعويض الطاقة المفقودة من طرف المحيط الخارجي . عكس ذلك تكون حركة المتذبذب مصانة . للحصول على هذا النوع من الذبذبات يتم تجميع المتذبذب الميكانيكي مع جهاز يمنحه الطاقة اللازمة . يسمى هذا الأخير بالمثير وهو مجموعة ذات حركة جيبيية تفرض دورها  $T_e$  على المجموعة المتذبذبة والتي تسمى بالرنان ، فتصبح هذه الأخيرة تنجز ذبذبات قسرية دورها  $T_0 = T_e$  .

### 2 - تمرين تجريبي ( بكالوريا فرنسية يونيو 2003 Ile de La Réunion ) بتصرف

ننمذج النوابض أو المخمدات (les amortisseurs) التي تحمل السيارة بنابض ذي لفات غير متصلة كتلته مهملة وصلابته  $K = 40N/m$  ( القيمة المشار إليها من طرف الصانع )

#### I - دراسة حالة التوازن

للتأكد من قيمة صلابة النابض ، نقيس الطول الأصلي للنابض  $\ell_0 = 10,0cm$  ، ثم ، في تجربة أخرى نعلق بطرفه الحر جسم كتلته  $m = 100g$  ، فيصبح طول النابض النهائي  $\ell = 12,4cm$  . نعطي  $g = 10m/s^2$  .

1 - 1 أحسب صلابة النابض  $K'$  .

دراسة توازن الجسم المعلق بالنابض :

جرد القوى المطبقة على الجسم :  $\vec{P}$  وزن الجسم ،  $\vec{F}$  توتر النابض

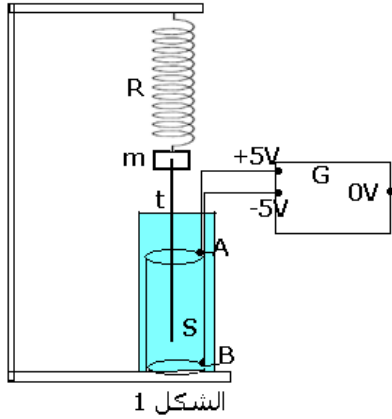
نطبق شرطا التوازن بالنسبة لجسم خاضع لقوتين وفي حالة توازن أن لهتين القوتين نفس الشدة :

$$K = \frac{mg}{\Delta\ell} = 42N/m \text{ فإن } F = P \Rightarrow mg = K\Delta\ell$$

1 - 2 ما هو الخطأ النسبي الناتج عن عملية القياس التي قام بها المجرب بالنسبة للقيمة  $K$  المشار إليه من طرف الصانع .

نذكر بأن الخطأ النسبي لمقدار  $X$  هو  $\frac{X_{exp} - X_{th}}{X_{th}}$

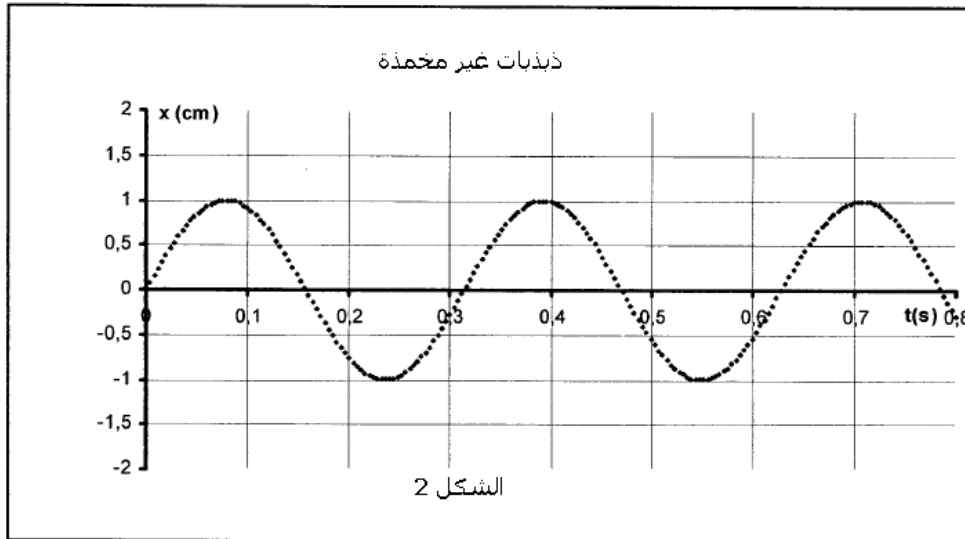
حسب العلاقة الخطأ النسبي هو :  $\frac{42 - 40}{42} = 0,05 = 5\%$



## II - الدراسة التحريكية

لدراسة حركة المجموعة { النابض + الجسم } نستعمل المجموعة الممثلة في الشكل (1) والتي تتكون من إلكترودين  $A$  و  $B$  ، مثبتين في محلول  $S$  ، ومرتبطين بالقطبين  $(+5V, -5V)$  لمولد التوتر المستمر . قضيب فلزي  $t$  مكسوا كلياً بعازل ومثبت بكتلة معلمة  $m$  . طرفه  $E$  يتبع حركة الكتلة المعلمة  $m$  .

يمكن قياس التوتر بين النقطة  $O$  والقطب  $0V$  للمولد من كشف موضع النقطة  $E$  . مما يمكن كذلك من معرفة موضع الكتلة  $m$  خلال الحركة التذبذبية . هذه المجموعة مرتبطة بجهاز يستقبل المعطيات وبواسطة برنم ملائم يمكن معالجتها للحصول على منحني تغيرات الأفصول  $x$  للكتلة  $m$  بدلالة الزمن  $t$  وذلك بعد أن إزاحة الكتلة  $m$  عن موضع توازنها نحو الأسفل ب  $1cm$



وتحريرها بدون سرعة بدئية . حيث نحصل على ذبذبات حرة وغير مخمدة . أنظر الشكل 2 .

1 - حدد الدور الخاص لحركة المتذبذب . هل هذه القيمة توافق القيمة النظرية للدور الخاص ؟ من خلال المبيان نحصل على القيمة التجريبية للدور الخاص للمتذبذب المرن  $T_{0exp} = 0,33s$  .

حساب القيمة النظرية للدور الخاص :  $T_{0th} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 0,314s$  تتوافق مع القيمة التجريبية .

2 - باستعمال معادلة الأبعاد ، بين أن وحدة الدور الخاص هي الثانية.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$  نعلم أن  $2\pi$  بدون وحدة و وحدة الكتلة هي  $kg$  و وحدة صلابة النابض  $N/m$

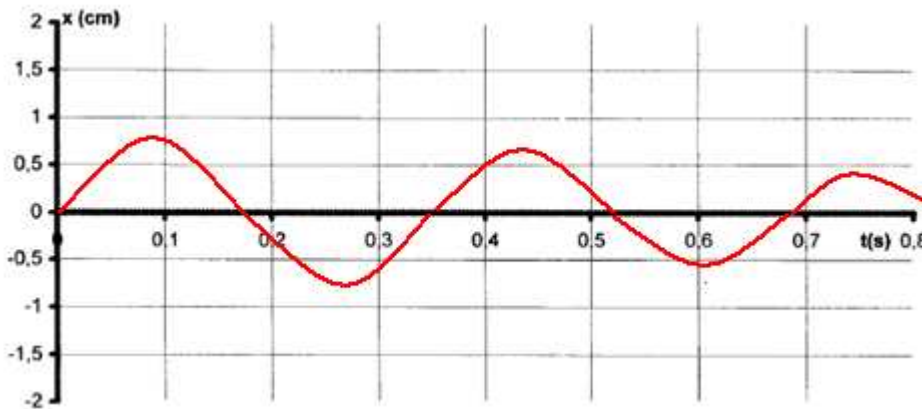
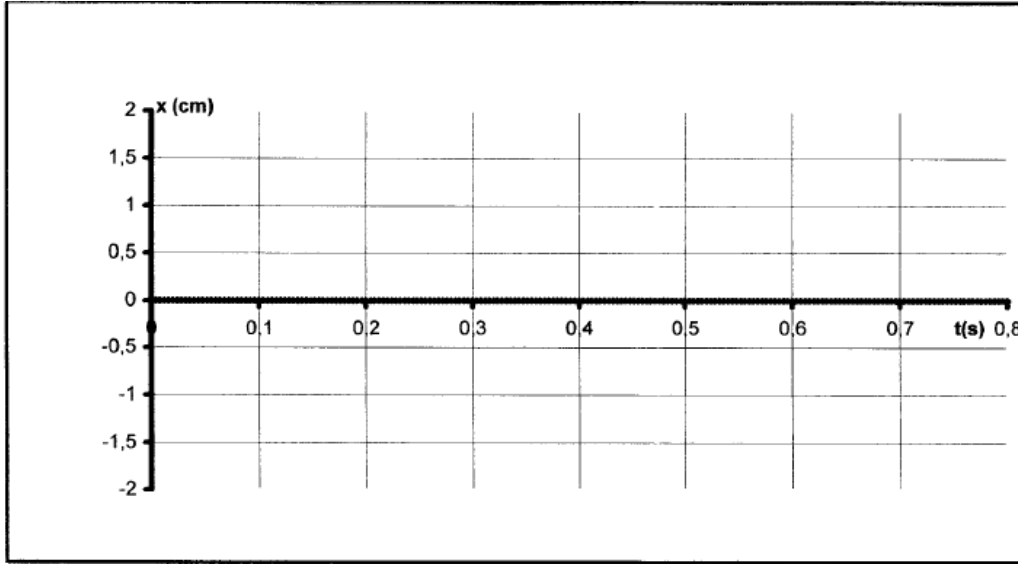
وأن النيوتن هو  $kg.m / s^2$

تكتب معادلة الأبعاد للدور الخاص  $T_0$  على الشكل التالي :

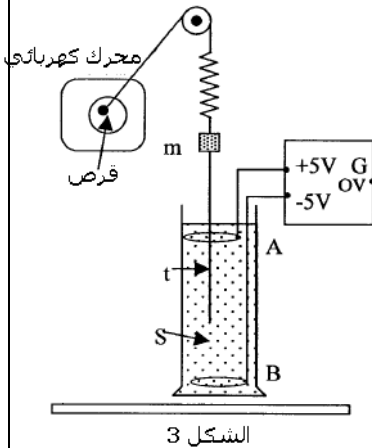
$$[T_0] = \left( \frac{[M].[L].[T]^2}{[M].[L]} \right)^{1/2} = [T]$$

. أي أن وحدة الدور الخاص هي الثانية (s).

3 - نعوض المحلول (S) بمحلول آخر لزوجته أكبر . خط شكل المنحنى المحصل عليه في هذه الحالة



شكل  
المنحنى  
المحصل  
عليه



الشكل 3

### III - دراسة ذبذبات قسرية

ننجز التركيب التجريبي التالي الشكل 3 ، حيث بواسطة خيط غير قابل الامتداد وكتلته مهملة يمر من مجرى بكرة مثبتة ، نربط طرف النابض بمحرك كهربائي يحدث لقرص حركة دوران منتظم حول محور ثابت . عند تشغيل المحرك يحدث الجهاز { المحرك ، القرص ، الخيط } للنواس المرن حركة تذبذبية ترددها يتناسب اطرادا مع سرعة دوران القرص . ننجز عدة تسجيلات لمختلف سرعات دوران القرص المرتبط بالمحرك حيث تردده  $f$  بالهرتز . ونسجل تغيرات وسع كل تسجيل بدلالة التردد  $f$  فنحصل على الجدول التالي :

1 - حدد من خلال هذه التجربة المجموعة التي تلعب دور المثير

$f (Hz)$	1,5	2	2,5	2,8	3,1	3,2	3,3	3,6	4	4,5
$x_{max} (cm)$	0,4	0,6	1	1,5	2,1	2,3	2	1,5	1	0,7

والمجموعة التي تلعب دور الرنان .

**تجز مجموعة ميكانيكية ذبذبات قسرية عندما يفرض مثير دوره على هذه المجموعة التي تسمى بالرنان**

2 - مثل على ورق مليمتري  $x_m = g(f)$  باستعمال السلم :  $1cm \leftrightarrow 0,5Hz$  و  $1cm \leftrightarrow 0,5cm$

3 - ما اسم الظاهرة المحصلة عند  $f = 3,2Hz$  ؟ استنتج في هذه الحالة دور الذبذبات .

4 - قارن هذا الدور مع دور الذبذبات الحرة غير المخمدة .

5 - ما التغيرات الملاحظة عند استعمال محلول ( $S$ ) ذي لزوجة أكبر ؟

عندما نستعمل محلول لزوجته أكبر ستزداد الاحتكاكات وبالتالي

سيتناقص وسع الذبذبات وكذلك دورها عند الرنين .

**تأثير الخمود على الرنين :**

**في حالة الخمود الضعيف للرنان ، يأخذ وسع الذبذبات**

**القسرية عند الرنين قيمة كبيرة ، نقول أن الرنين حادا .**

**في حالة الخمود القوي للرنان ، يأخذ وسع الذبذبات**

**القسرية عند الرنين قيمة صغير ، نقول إن الرنين ضبابي**

**IV - المجموعة معاليق السيارة**

تتكون المجموعة معاليق السيارة من نوابض ومخمدات . تكون

السيارة المجموعة المتذبذبة ترددها الخاص  $f_0$  .

تحدث الرياح على رمال الصحراء ممرات متموجة تسمى بالمطالة المتموجة « les tôles ondulées »

فهي تحتوي على حذبات متتالية ومنتظمة تفصل بينها مسافة  $L$  ( بعض العشرات من السنتيمترات )

بالنسبة لسرعة  $v_R$  ، تخضع السيارة لذبذبات ذات وسع قوي والتي يجب تجنبها حتى لا يتم إتلاف

السيارة .

1 - فسر هذه الظاهرة موضحا دور الممرات المتموجة .

نمذج معاليق السيارة بمتذبذب ميكانيكي تردد الخاص  $f_0$  له دور الرنان ، عند مرورها من تموجات أو

حذبات ممتالية والتي تلعب دور المثير فإن السيارة ستخضع إلى دفعات دورية أي لها تردد وهو تردد

المثير في حالة هذا التردد يساوي تردد الرنان  $f_0$  ستكون عندنا ظاهرة الرنين وبالتالي ستتلف السيارة

2 - عبر عن السرعة  $v_R$  بدلالة  $f_0$  و  $L$  .

المدة الزمنية المستغرقة خلال مرور السيارة من حذبتين هي  $\Delta t = \frac{L}{v_R}$  وهي تمثل دور المثير أي أن

تردده هو :  $f_e = \frac{1}{T_e} = \frac{v_R}{L}$  بما أنه عند الرنين  $f_e = f_0$  فإن  $v_R = L \cdot f_0$  .

تطبيق عددي :  $v_R = 14,4 km/h$

